УДК 550.831+550.8

Ю. І. Дубовенко

Про визначення контакту у модельному класі Сретенського

(Представлено академіком НАН України В.І. Старостенком)

Сформульована обернена контактна задача гравіметрії для контактної поверхні в класі Сретенського. Доведено розривність вертикальної похідної сили тяжіння, яка фігурує в її правій частині. Ця особливість використана для редукції задачі до альтернативної постановки у вигляді інтегрального рівняння 1-го роду. Шляхом різницевого аналізу меж відповідних інтегралів виведено ефективний спосіб послідовного обчислення контактів. Задача узагальнюється на n меж і зберігає коректність в межах класу Сретенського.

Вступ. З початку XXI ст. відбувається неперервна зміна основної парадигми теорії інтерпретації потенціальних полів [1]. Вона супроводжуєтеся переглядом ключових методологічних [2], апаратно-програмних [3] та чисельних [4] засад тлумачення даних цих полів. В рамках творення чисельного базису цієї нової парадигми особливої ваги набуває розробка адекватного геофізичній практиці апарату математичного моделювання геофізичних подів, адаптованого до обробки масивів даних великої розмірності, у тому числі – на комплексах паралельних обчислень.

Ключове місце в рамках нової методології належить аналітичним апроксимаціям середовища й поля. Теоретичне підґрунтя такого підходу викладено в роботі Страхова [2]. В рамках нової методології активно розробляються конструктивні аналітичні апроксимації геологічного середовища. Зокрема, введені в науковий обіг апроксимації на основі типових блоково-шаруватих або сферично-циліндричних елементів [5]. Постульовано нагальну потребу доповнити ці конструкції апроксимаціями потенціальних полів [6]. Це, певною мірою, було зроблено у праці [7], в якій запропоновано новий математичний базис (диференціальне рівняння) для опису аномалій сили тяжіння. Також вивчаються апроксимації рельєфу поверхні спостережень шляхом параметризації заданими гладкими функціями [8].

Продовжуючи актуальні розробки аналітичних апроксимацій середовища, ми пропонуємо *нову* апроксимаційну схему для визначення контакту двох однорідних тяжіючих тіл, які належать до класу Сретенського, за заданим розподілом вертикальної компоненти аномалій сили тяжіння. Зауважимо, що аналітичні конструкції методу дозволяють реалізувати розпаралелювання обчислень за рахунок рекурентності виразів для розв'язання відповідної прямої задачі.

Відзначимо, що постановка і розв'язання прямих та обернених задач граві- і магнітометрії у постановці для класу тіл Л.М. Сретенського започатковані в працях Булаха [9]. Ці постановки виписані для чисельної моделі як із одного [10], так і кількох [11] рудних тіл. В силу вдалої та зручної параметризації вони зручні для практичного застосування в комплексі інтерпретації даних рудної геофізики. Однак формулювання, власне, самого класу Сретенського моделей аномальних тіл дозволяє виписати пряму задачу гравіметрії у структурній постановці, чого досі не було зроблено. Поширення розв'язку цієї задачі на кілька контактних поверхонь відповідатиме сучасній практиці моделювання складного геологічного середовища за комплексом геофізичних даних.

Постановка задачі. Нехай на деякій горизонтальній площині $z = 0$ (вісь z спрямована вниз) задані значення вертикальної похідної $U_z(x,0)$ потенціалу сили тяжіння, зумовленого "нескінченним" шаром *C* (видовжується в обидва боки за профіль спостережень), витягнутим уздовж осі *y*. Нехай цей шар складається із двох пластів із постійною густиною *σ* = const, розділених горизонтальною контактною поверхнею *H*. Цей об'єкт належить класу двовимірних тіл, для яких існує *середня площина* Z_0 (вона проходить через тіло так, що будь-який перпендикуляр до неї перетинає поверхню тіла лише у двох точках, по різні сторони від площини). Контактна поверхня *H* ундулює навколо середньої площини Z_0, не надто ухиляючись від неї, у смислі метрики бананового простору $\|H - Z_0\|_B \to \min_{x \in D}$. В частинному випадку *H* може співпадати з Z_0. Назвемо цей модельний клас тіл – класом Сретенського $Sr(1, D)$, (структурний варіант), де 1 означає сталу густину, а D – замкнену область (поверхню), виповнену тяжіючими масами.

Зауваження 1. Якщо площина спостережень (денна поверхня) не є горизонтальною, її можна апроксимувати будь-якою конструкцією $z = \mathrm{H}(x, y)$, у тому числі, однією із пропонованих в [9].

Зауваження 2. Визначення класу $Sr(1,D)$ через поняття *середня площина* не є конструктивним, оскільки застерігає лише від вжитку "глечикоподібних" тіл і ніяк не регламентує спосіб визначення цієї середньої площини, наприклад, для множини багатокутників, серед яких можуть трапитись і такі тіла, як зображене на рис. 1.

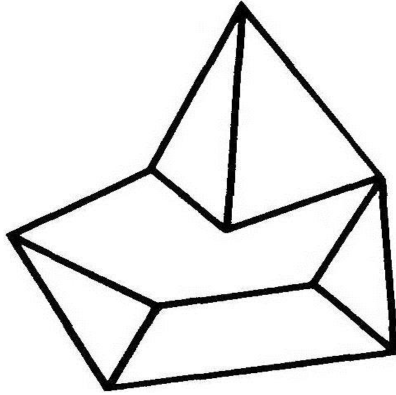


Рис. 1. Модель рудного тіла, для якої середня площина у смислі Л. Сретенського є неоднозначною.

На нашу думку, подолати амбівалентність означення класу $Sr(1,D)$ можна, залучивши диференціальні характеристики конкретного сімейства тіл, як, наприклад, зроблено в [8]. Втім, подібні міркування виходять за рамки статті. Модель горизонтального циліндра апріорі задовольняє вимоги класу.

Уточнимо характеристику класу $Sr(1,D)$. Сполучаючи із середньою площиною аномального тіла координатну площину $\xi o \eta$, аналітично опишемо область D, зайняту тілом, так:

$$D = \left\{(\xi,\zeta) : a \le \xi \le b,\ \zeta^{(1)}(\xi) \le \zeta \le \zeta^{(2)}(\xi)\right\}, \qquad (1)$$

де $-\infty < \zeta^{(i)}(\xi) < \infty$ – певні контактні поверхні. При цьому межу ∂D області D можна представити як об'єднання двох контурів $\partial D_1 \bigcup \partial D_2$ у вигляді:

$$\partial D_i = \left\{(\zeta,\xi) :\ a \le \xi \le b,\ \zeta = \zeta^{(i)}(\xi),\ i = 1,2\right\}. \qquad (2)$$

Розглянемо підклас $Sr(1,D_0)$ класу $Sr(1,D)$, коли $a=-\infty,\ b=\infty$, а осі координат ξ і x, ζ і z паралельні. Тоді, не порушуючи загальності міркувань, можна представити область D_0 і її межі у аналітичному вигляді:

$$D_0 = \left\{(\xi,\zeta) :\ -\infty < \xi < \infty,\ z^{(1)} \le \zeta \le z^{(2)}\right\},$$
$$\partial D_{0i} = \left\{(\xi,\zeta) :\ -\infty < \xi < \infty,\ z^{(i)} = \zeta^{(i)}(\xi),\ i = 1,2\right\}. \qquad (3)$$

Нехай підклас $Sr(1,D_0)$ тяжіючих тіл складається із двох контактних поверхонь

$$z^{(i)} = \zeta^{(i)}(\xi),\ -\infty < \zeta < \infty,\ i = 1,2\,, \qquad (4)$$

розділених середньою площиною $z = z_0 > 0$.

Поставимо таку задачу: визначити контакти (4) за значеннями вертикальної похідної $U_z(x,0)$ потенціалу сили тяжіння.

Аналітичні властивості аномалій. Розв'язати цю задачу допоможе аналіз властивостей похідних потенціалу сили тяжіння $U(x,z)$. Представимо ці похідні у вигляді

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x} = 2f\sigma \iint_G \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta\,,$$
$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z} = 2f\sigma \iint_G \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta\,, \qquad (5)$$

де, в даному випадку,

$$D = \left\{(\xi,\zeta) :\ -\infty < \xi < \infty,\ 0 \le \zeta \le \zeta(\xi)\right\}. \qquad (6)$$

Внаслідок подання (6), подвійні інтеграли в формулах (5) можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x} = 2f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\zeta(\xi)} \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta\,,$$
$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z} = 2f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\zeta(\xi)} \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta\,.$$

Зважаючи на результати, отримані в праці [12], звідси, після ряду нескладних аналітичних перетворень, будемо мати

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x} = 2f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\zeta(\xi) - z}{\xi - x} d\zeta\,,$$

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z} = f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + [\zeta(\xi) - z]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta(x) - z]^2} d\zeta + \begin{cases} 2\pi f\sigma\zeta(x),\ z \le 0 \\ 2\pi f\sigma[\zeta(x) - 2z],\ 0 < x < \zeta \\ -2\pi f\sigma\zeta(x),\ \zeta(x) \le z \end{cases}. \qquad (7)$$

Отже, функція $U_x(x,z)$ щодо z є неперервною, в той час як функція $U_z(x,z)$ щодо z – розривна. На підставі дослідження фундаментальних властивостей (7) контактів (4), за методикою аналізу гармонічних функцій, розвиненою в [12], одержуємо при $z \to -0$ такі вирази зовнішніх похідних гравітаційного потенціалу

$$\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial x} = 2f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{\zeta^{(i)}(\xi)}{\xi - x} d\zeta,$$

$$\frac{\partial U_e(x,z)}{\partial z} = f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i \left\{2\pi\zeta^{(i)}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(i)}(x)]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(i)}(\xi)]^2} d\zeta\right\}. \qquad (8)$$

У той же час на середній площині $z = z_0$ ($\zeta^{(1)}(x) < z_0 < \zeta^{(2)}(x),\ -\infty < x < \infty$) з тих же співвідношень (7) знаходимо, що

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial x} = 2f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{\zeta^{(i)}(\xi) - z_0}{\xi - x} d\zeta,$$

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial z} = -2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) = 2\pi f\sigma_2\left[\zeta^{(2)}(x) - 2z_0\right] +$$

$$+ f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(i)}(\xi) - z_0]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(i)}(x) - z_0]^2} d\zeta \qquad . (9)$$

Спосіб розв'язання. Очевидно, що значення потенціалу на поверхні (8) і на середній площині (9) розбігаються. Це нескладно було передбачити, виходячи з виразу (7). Однак, у цьому протиріччі закладена цікава можливість для розв'язання поставленої задачі.

Дійсно, знайдемо *внутрішню* межу похідної, обчисливши інтеграл Пуассона

$$\frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(\eta,z_0)}{\partial z} \frac{z_0}{(\eta - x)^2 - z_0^2} d\eta. \qquad (10)$$

При цьому представимо підінтегральну функцію у наступному вигляді

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial z} = -2f\sigma_1 \iint_{G_1} \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta +$$

$$+ 2f\sigma_2 \iint_{G_1} \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$

для тяжіючої області $G_i = \{(\xi,\zeta):\ -\infty < \xi < \infty,\ 0 \le \zeta \le \zeta^{(i)}(\xi)\}$. Обчислюючи інтеграл (10), одержимо, з урахуванням наведеного вище зображення, такий вираз:

$$\frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = -2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) + 2\pi f\sigma_2\zeta^{(2)}(x) -$$

$$f\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\sigma_i \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(i)}(x)]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(i)}(\xi)]^2} d\zeta. \qquad (11)$$

Враховуючи значення зовнішньої межі (8), та величину виразу (11), знайдемо різницю меж:

$$\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = 4\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) - 2f\sigma_1 \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(1)}(x)]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(1)}(\xi)]^2} d\zeta.$$

Щоб спростити подальші викладки, позначимо цю різницю потенціалів через функцію $W(x)$, де $W(x) = \frac{1}{4\pi f\sigma_1}\left\{\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z}\right\}$. Відтак, ми отримали нелінійне інтегральне рівняння

$$\zeta^{(1)}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \left[\zeta^{(1)}(x)\right]^2}{(\xi - x)^2 + \left[\zeta^{(1)}(\xi)\right]^2} d\zeta = W(x). \qquad (12)$$

для визначення першого наближення контакту $z^{(1)} = \zeta^{(1)}(x), \ -\infty < x < \infty$. Розв'язання подібних рівнянь започатковане у вже заданій вище праці [12].

Визначивши із останнього рівняння функцію $\zeta^{(1)}(x)$, зможемо обчислити наближення поля

$$\frac{\partial U_1(x,0)}{\partial z} = 2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) - f\sigma_1\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \left[\zeta^{(1)}(x)\right]^2}{(\xi - x)^2 + \left[\zeta^{(1)}(\xi)\right]^2} d\zeta \ . \qquad (13.1)$$

А це, у свою чергу, дозволяє знайти в "чистому вигляді" ефект від наступного контакту у вигляді різниці граничного та попереднього значень вертикальної похідної потенціалу:

$$\frac{\partial U_2(x,0)}{\partial z} = \frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial z}.$$

Маючи цю величину, можна з рівняння, аналогічного рівнянню (13.1), тобто

$$2\pi f\sigma_2\zeta^{(2)}(x) - f\sigma_2\int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \left[\zeta^{(2)}(x)\right]^2}{(\xi - x)^2 + \left[\zeta^{(2)}(\xi)\right]^2} d\zeta = \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial z} \qquad (13.2)$$

обчислити чергове наближення контакту $z^{(2)} = \zeta^{(2)}(x), \ -\infty < x < \infty$. Таким чином, ми знайшли "верхню" і "нижню" межі області (1), що й розв'язує поставлену задачу (4). До речі, власне, самі контакти $\zeta^{(i)}(\xi)$ можна апроксимувати, серед іншого, конструкціями типу наведених в праці [11].

Зауваження 3. Наведені вище математичні викладки легко узагальнюються на випадок *n* меж $z^{(i)} = \zeta^{(i)}(x), \ -\infty < x < \infty$, якщо між кожною парою цих меж можна провести середню площину (тобто якщо ці межі не виходять за межі класу $Sr(1,D)$).

Висновок. Введено в науковий обіг нові апроксимаційні конструкції (12) й (13.1-2), за допомогою яких можна ефективно відновлювати будову шаруватого геологічного середовища, зображеного парами (верхня і нижня межі) контактів, обмежених властивостями класу Сретенського.

Доведено, що на класі $Sr(1,D)$ послідовні наближення $\zeta^{(i)}(x)$ однозначні й стійкі (збігаються до заданого точного розв'язку $\zeta^{(0)}(x)$), якщо похибка вхідних даних не перевищує 3% від максимальної амплітуди аномалій $U_z(x,0)$ [13].

Дискретизацію інтегральних рівнянь (12) й (13.1-2) доцільно здійснити за допомогою відомих методів скінченновимірної редукції інтегральних рівнянь 1-го роду [14]. Алгоритм розв'язання задачі пройшов первинну апробацію на працездатність. У перспективі передбачається поширення аналітичних викладок на тривимірний випадок та апробація алгоритму на практичних матеріалах.

1. *Страхов В.Н.* Принципиально новая теория нитерпретации данных о потенциальных полях (гравитационных и магнитных аномалий) // Геофиз. журн. – 2003. – **25**, № 1. – С. 3–7.
2. *Страхов В.Н.* Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии // Геофиз. журн. – 2007. – **29**, № 1. – С. 56–84.
3. *Бычков С.Г., Симанов А.А., Хохлова В.В*. Современные процедуры вычисления аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических наблюдениях // Вестник Пермского ун-та. Геология. – 2013. – Вып. 3(20). – С. 61–70. http://cyberleninka.ru/article/n/~
4. *Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э., Страхов А.В., Гричук Л.В*. Новый информационный базис гравиметрии и магнитометрии// Геофизика и математика. Пермь, Горный ин-т УрО РАН, 2001. С. 274–277.
5. *Страхов В.Н.* Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли // Геофизика и математика. – Москва, 1999.
6. *Якимчик А.І., Чорна О.А.* Про побудову аналітичних апроксимацій елементів аномальних гравітаційних полів // Вісник Київ. ун-ту. Геологія. – Вип. 51. – 2010. – С. 12–14.
7. *Дубовенко Ю.І.* Відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта в задачі Алексідзе // Вісник Київ. ун-ту. Геологія. – Вип. 55. – 2011. – С. 61–65.
8. *Дубовенко Ю.И., Черная О.А*. Об определении плотностного контакта в сложнопостроенной среде // XI Межд. конф. по геоинформатике – теоретические и прикладные аспекты (Геоинформатика-2012): Киев, 14-17 мая 2012 г. – Киев, 2012. – CD-ROM. – С. 3494.
9. *Булах Е.Г.* Обратные задачи гравиметрии для геологических моделей класса Сретенского // Доп. НАН

України. – 2002. – № 1. – С. 117–119.
10. *Булах Е.Г.* О другом аппроксимационном построении геологической модели класса Сретенского для решения обратных задач гравиметрии // Доп. НАН України. – 2002. – № 5. – С. 128–132.
11. *Булах Е.Г., Слободник Н.А* Обратные задачи магнитометрии для совокупности тел класса Л.Н. Сретенского // Геофиз. журн. – 2008. – **30**, № 3. – С. 49–55.
12. *Дубовенко Ю.І., Чорний А.В.* Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофіз. журнал. – 2002. – **24**, № 3. – С. 77–92.
13. *Дубовенко Ю.И.* Об определении плотностных неоднородностей в классе Сретенского // XV Уральская молодежн. науч. школа по геофизике, 24-29 марта 2014 г., Екатеринбург. Сб. докл. – Екатеринбург, 2014. – С. 84–86.
14. *Верлань А.Ф , Сизиков В С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук, думка, 1986. – 544 с.

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна
НАН України, м. Київ

Надійшло до редакції 06.10.2014

Ю.І. Дубовенко

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ У МОДЕЛЬНОМУ КЛАСІ СРЕТЕНСЬКОГО

Сформульована обернена контактна задача гравіметрії для контактної поверхні в класі Сретенського. Доведено розривність вертикальної похідної сили тяжіння, яка фігурує в її правій частині. Ця особливість використана для редукції задачі до альтернативної постановки у вигляді інтегрального рівняння 1-го роду. Шляхом різницевого аналізу меж відповідних інтегралів виведено ефективний спосіб послідовного обчислення контактів. Задача узагальнюється на *n* меж і зберігає коректність в межах класу Сретенського.

Ключові слова: гравіметрія; обернена задача; аналітична апроксимація; клас Сретенського; відновлення контакту; контактна поверхня; інтегральне рівняння; гравітаційний потенціал; математична модель; середня площина.

Ю.И. Дубовенко

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНТАКТА В МОДЕЛЬНОМ КЛАССЕ СРЕТЕНСКОГО

Сформулирована обратная контактная задача гравиметрии для контактной поверхности в классе Сретенского. Доказана разрывность вертикальной производной силы тяжести, стоящей в её правой части. Эта особенность использована для сведения задачи к альтернативной постановке в виде интегрального уравнения 1-го рода. Путём разностного анализа границ соответствующих интегралов выведен эффективный способ последовательного вычисления контактов. Задача обобщается на *n* границ и сохраняет корректность в рамках класса Сретенского.

Ключевые слова: гравиметрия; обратная задача; аналитическая аппроксимация; класс Сретенского; контактная поверхность; интегральное уравнение; гравитационный потенциал; математическая модель; средняя плоскость.

Yu.I. Dubovenko

ON THE DENSITY INTERFACE DEFINITION WITHIN SRETESKII MODEL CLASS

The contact problem of gravity inversion for density interface within the Sretenskii class is postulated. A discontinuity of the gravity vertical derivative, which appears in the problem's right hand, is proved. This feature is used to reduce the problem to alternative statement in in the form of the 1^{st} kind integral equation. By means of residual analysis of the boundaries for the corresponding integrals, an efficient technique for successive calculation of the density interface is deduced. The problem is generalized onto *n* boundaries case, while preserving its correctness within the Sretenskii class.

Key words: gravimetry; inversion; analytical approximation; Sretenskii class; density interface; integral equation; gravity potential; mathematical model; the mean surface.

Дубовенко Юрій Іванович, к.ф.-м.н., *старший наук. співробітник* Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України. Тел. 063-390-9251, 066-597-83-94, 044-424-20-52.

Ел. пошта: nemishayeve@ukr.net, leader96@yandex.ua;

Адреса: 03142, Київ-142, пр. Палладіна, 32, к. 304.